

## PELABELAN ANTI AJAIB PADA GRAF HASIL KALI SISIR

MARIANCE CRISATYA LIUNOKAS\*, GANESHA LAPENANGGA PUTRA, RAPMAIDA  
MEGAWATY PANGARIBUAN, IRVANDI GORBY PASANGKA

*Program Studi Matematika  
Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana,  
email : marianceliunokas@gmail.com, ganesha.lapenangga@staf.undana.ac.id, pangaribuan\_*  
*rapmaida@staf.undana.ac.id, irvandi.p@staf.undana.ac.id*

Diterima 10 Februari 2025    Direvisi 9 Juli 2025    Dipublikasikan 31 Juli 2025

**Abstrak.** Suatu graf  $G$  dikatakan graf anti ajaib jika memuat pelabelan anti ajaib, yaitu  $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$  merupakan fungsi bijektif, dan untuk setiap simpul memiliki nilai bobot yang berbeda. Dalam tulisan ini diberikan beberapa graf hasil kali sisir yang memuat pelabelan anti ajaib, yaitu graf  $C_m \triangleright_o C_n, P_m \triangleright_o C_n, S_m \triangleright_o C_n, W_m \triangleright_o C_n$  dan secara umum untuk  $G$  suatu graf terhubung dan  $r$ -reguler,  $G \triangleright_o C_n$  merupakan graf anti ajaib.

**Kata Kunci:** Graf anti ajaib, hasil kali sisir, pelabelan anti ajaib

**Abstract.** A graph  $G$  is said to be an antimagic graph if it admits an antimagic label, that is,  $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$  is a bijective function, and each vertex has a different weight value. This paper presents several comb product graphs that admits antimagic labeling, specifically the graphs  $C_m \triangleright_o C_n, P_m \triangleright_o C_n, S_m \triangleright_o C_n, W_m \triangleright_o C_n$  and in general for  $G$  a connected and  $r$ -regular graph,  $G \triangleright_o C_n$  is an anti-magic graph.

**Keywords:** Antimagic graph, comb product, antimagic labeling

### 1. Pendahuluan

Graf merupakan kumpulan dari simpul dan garis, dimana jika ditarik garis untuk menghubungkan dua simpul maka membentuk sebuah sisi [1]. Secara umum, graf  $G$  dapat didefinisikan sebagai pasangan terurut dari dua himpunan, yaitu himpunan simpul dan himpunan sisi. Untuk pemahaman mengenai konsep dasar graf, dapat dilihat pada [2,3].

Pada graf, salah satu konsep yang sering ditemui adalah pelabelan. Pelabelan sendiri merupakan suatu proses yang dilakukan untuk mengubah kumpulan elemen dalam graf, baik simpul maupun sisi ke bilangan bulat positif [4]. Terdapat beberapa

\*Penulis korespondensi

konsep pada pelabelan, salah satunya adalah **pelabelan anti ajaib** dengan elemen yang diberi label adalah sisi. Misalkan terdapat fungsi dengan domain himpunan sisi dan kodomain bilangan asli yang kurang dari sama dengan  $|E(G)|$ . Dikatakan pelabelan anti ajaib jika bobot tiap simpulnya berbeda. Bobot simpul ini diperoleh dari penjumlahan label sisi-sisi yang terkait dengan simpul tersebut [5]. Secara singkat, dapat dikatakan bahwa pelabelan anti ajaib merupakan suatu fungsi yang bijektif yang bobot simpulnya tidak ada yang sama [6]. Suatu graf  $G$  dikatakan **graf anti ajaib** jika graf tersebut memuat pelabelan anti ajaib [7,8].

Penelitian mengenai graf anti ajaib telah banyak dilakukan. Pada [9] telah diemukakan beberapa graf yang terbukti merupakan graf anti ajaib, diantaranya graf lintasan ( $P_n$ ,  $n \geq 3$ ), graf siklus ( $C_n$ ), graf roda ( $W_n$ ) dan juga graf lengkap ( $K_n$ ). Selanjutnya, [10] membuktikan bahwa semua graf bipartit lengkap  $K_{p,q}$  adalah graf anti ajaib berbobot dengan parameter  $k = 0$  untuk  $2 \leq p \leq q$  dan  $q \geq 3$ . Sethuraman dan Shermily telah membuktikan bahwa pohon binomial  $B_k$ ,  $k \geq 2$  dan pohon Fibonacci  $F_h$ ,  $h \geq 2$  merupakan graf anti ajaib. Pohon binomial  $B_k$  dibentuk dari dua salinan pohon  $B_{k-1}$  yang dihubungkan melalui akarnya. Sedangkan pohon Fibonacci dibentuk dari satu salinan  $F_{h-1}$  dan satu salinan  $F_{h-2}$  yang dihubungkan melalui simpul baru yang menjadi akar dari  $F_h$  [11]. Nalliah dalam penelitiannya menggunakan barisan Skolem berhasil menunjukkan adanya pelabelan anti ajaib pada beberapa keluarga graf berarah [12]. Pada [13] dibuktikan bahwa graf reguler dengan derajat genap merupakan graf anti ajaib, sedangkan dalam [14] dibuktikan bahwa graf reguler dengan derajat ganjil juga merupakan graf anti ajaib. Lebih lanjut, Latchoumanane [15] pada penelitiannya membuktikan bahwa jika terdapat dua graf yang masing-masing terhubung  $k$ -reguler dan  $t$ -reguler, maka hasil kali korona kedua graf tersebut memuat pelabelan anti ajaib dengan  $k, t \geq 2$ .

Berdasarkan hasil-hasil penelitian sebelumnya, penulis ingin meneliti mengenai pelabelan anti ajaib lebih lanjut dengan menggunakan operasi hasil kali sisir antar dua graf. Graf hasil operasi hasil kali sisir antara graf  $G$  dan  $H$ , dinotasikan dengan  $G \triangleright_o H$ , diperoleh dengan cara mengambil satu salinan graf  $G$  dan menyalin graf  $H$  sebanyak jumlah simpul pada graf  $G$ , lalu tempelkan simpul  $o$  pada graf  $H$  ke simpul ke- $i$  di graf  $G$ , untuk  $1 \leq i \leq |V(G)|$  [16]. Dalam tulisan ini akan diteliti pelabelan anti ajaib untuk graf  $C_m \triangleright_o C_n$ , graf  $P_m \triangleright_o C_n$ , graf  $S_m \triangleright_o C_n$ , graf  $W_m \triangleright_o C_n$ , dan graf  $G \triangleright_o C_n$  untuk graf  $r$ -reguler  $G$ ,  $r \geq 2$ .

## 2. Pembahasan

Berikut adalah hasil yang diperoleh terkait pelabelan anti ajaib pada graf hasil kali sisir.

**Teorema 2.1.** *Misalkan terdapat graf siklus dengan  $m$  dan  $n$  titik, dinotasikan  $C_m$  dan  $C_n$ , dengan  $m, n \geq 3$  dan  $m$  ganjil. Maka graf  $C_m \triangleright_o C_n$  merupakan graf anti ajaib.*

**Bukti.** Berikut diberikan himpunan simpul dan himpunan sisi pada graf  $C_m \triangleright_o C_n$

sebagai berikut.

$$V(C_m \supseteq_o C_n) = \{v_i \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-1\},$$

$$E(C_m \supseteq_o C_n) = \{v_i v_{i,1} \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{v_i v_{i,n-1} \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{v_{i,j} v_{i,j+1} \mid 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-2\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq m-1\}.$$

Diberikan fungsi pelabelan sisi pada graf  $C_m \supseteq_o C_n$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(v_{i,j} v_{i,j+1}) &= n(i-1) + j + 1; & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-2, \\ f(v_i v_{i,1}) &= n(i-1) + 1; & 1 \leq i \leq m, \\ f(v_i v_{i,n-1}) &= ni; & 1 \leq i \leq m, \\ f(v_i v_{i+1}) &= mn + \frac{i+1}{2}; & 1 \leq i \leq m-1, i \text{ ganjil}, \\ f(v_i v_{i+1}) &= mn + \frac{m+i+1}{2}; & 1 \leq i \leq m-1, i \text{ genap}, \\ f(v_m v_1) &= mn + \frac{m+1}{2}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, berdasarkan fungsi pelabelan sisi yang ada diperoleh fungsi bobot simpulnya, yaitu sebagai berikut.

$$\begin{aligned} w(v_{i,1}) &= 2n(i-1) + 3; & 1 \leq i \leq m, \\ w(v_{i,n-1}) &= 2ni - 1; & 1 \leq i \leq m, \\ w(v_{i,j}) &= 2n(i-1) + 2j + 1; & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-2, \\ w(v_1) &= 2mn + \frac{m+5}{2} + n, \\ w(v_i) &= 2in + 2mn + \frac{m+2i+3}{2} - n; & 2 \leq i \leq m-1, \\ w(v_m) &= 4mn + \frac{3m+3}{2} - n. \end{aligned}$$

Karena secara jelas terlihat bahwa  $f$  merupakan fungsi bijektif dan juga tidak terdapat bobot simpul yang sama, maka disimpulkan bahwa graf  $C_m \supseteq_o C_n$  graf anti ajaib karena memenuhi pelabelan anti ajaib untuk  $m$  ganjil.  $\square$

Pada Gambar 1 diberikan contoh pelabelan anti ajaib pada graf  $C_7 \supseteq_o C_5$ , dengan bilangan berwarna merah merupakan label sisi sedangkan yang berwarna hitam merupakan nilai bobot simpul.

**Teorema 2.2.** Misalkan terdapat graf lintasan  $P_m$  dengan  $m \geq 2$  titik dan graf siklus  $C_n$  dengan  $n \geq 3$  titik. Maka graf  $P_m \supseteq_o C_n$  merupakan graf anti ajaib.

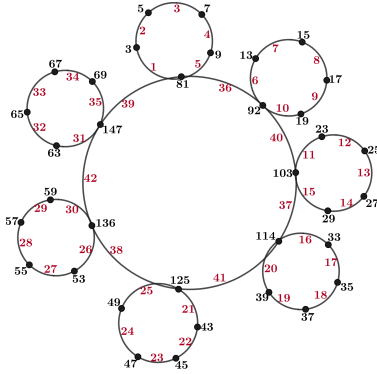
**Bukti.** Didefinisikan himpunan simpul graf  $P_m \supseteq_o C_n$  sebagai berikut.

$$V(P_m \supseteq_o C_n) = \{v_i \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-1\},$$

$$E(P_m \supseteq_o C_n) = \{v_i v_{i,1} \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{v_i v_{i,n-1} \mid 1 \leq i \leq m\}$$

$$\cup \{v_{i,j} v_{i,j+1} \mid 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-2\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq m-1\}.$$

Perhatikan dua kasus berikut.



Gambar 1. Pelabelan anti ajaib pada graf  $C_7 \triangleright_o C_5$

**Kasus 1**  $m \neq 4k$ , di mana  $k \in \mathbb{N}$ .

Didefinisikan fungsi pelabelan sisinya sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(v_{i,j}v_{i,j+1}) &= (n+1)(i-1) + j+1; & 1 \leq i \leq m, & 1 \leq j \leq n-2, \\ f(v_i v_{i,1}) &= (n+1)(i-1) + 1; & 1 \leq i \leq m, \\ f(v_i v_{i,n-1}) &= (n+1)(i-1) + n; & 1 \leq i \leq m, \\ f(v_k v_{k+1}) &= k(n+1); & 1 \leq k \leq m-1. \end{aligned}$$

Berdasarkan fungsi pelabelan sisi yang ada, maka diperoleh fungsi bobot simpulnya sebagai berikut.

$$\begin{aligned} w(v_i) &= (n+1)(4i-2); & 2 \leq i \leq m-1, \\ w(v_1) &= 2n+2, \\ w(v_{i,j}) &= (n+1)(2i-2) + 2j+1; & 1 \leq i \leq m, & 2 \leq j \leq n-2, \\ w(v_{i,1}) &= (n+1)(2i-2) + 3; & 1 \leq i \leq m, \\ w(v_{i,n-1}) &= (n+1)(2i-2) + 2n-1; & 1 \leq i \leq m, \\ w(v_m) &= (n+1)(3m-2). \end{aligned}$$

**Kasus 2**  $m = 4k$ , di mana  $k \in \mathbb{N}$ .

Didefinisikan fungsi pelabelan sisinya sebagai berikut.

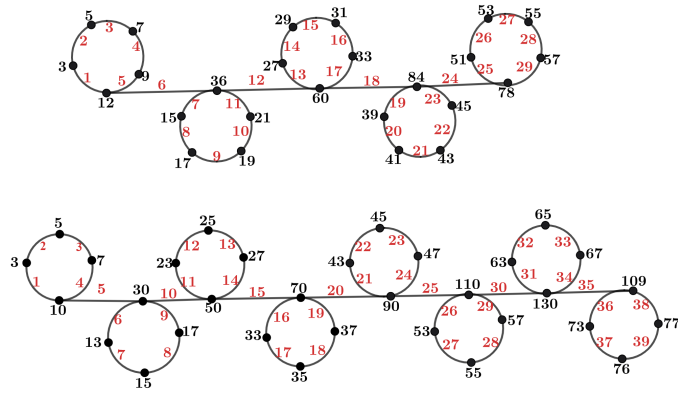
$$\begin{aligned} f(v_{i,j}v_{i,j+1}) &= (n+1)(i-1) + j+1; & 1 \leq i \leq m-1, & 1 \leq j \leq n-2, \\ f(v_i v_{i,1}) &= (n+1)(i-1) + 1; & 1 \leq i \leq m, \\ f(v_i v_{i,n-1}) &= (n+1)(i-1) + n; & 1 \leq i \leq m-1, \\ f(v_{m,j}v_{m,j+1}) &= (n+1)(m-1) + j+1; & 1 \leq j \leq n-3, \\ f(v_{m,j}v_{m,j+1}) &= (n+1)(m-1) + n; & j = n-2, \\ f(v_{m,n-1}v_m) &= (n+1)(m-1) + n-1, \\ f(v_k v_{k+1}) &= k(n+1); & 1 \leq k \leq m-1. \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk fungsi bobotnya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 w(v_i) &= (n+1)(4i-2); & 2 \leq i \leq m-1, \\
 w(v_1) &= 2n+2, \\
 w(v_{i,j}) &= (n+1)(2i-2) + 2j+1; & 1 \leq i \leq m, \ 2 \leq j \leq n-3, \\
 w(v_{i,1}) &= (n+1)(2i-2) + 3; & 1 \leq i \leq m. \\
 \\ 
 w(v_{i,n-1}) &= (n+1)(2i-2) + 2n-1; & 1 \leq i \leq m-1, \\
 w(v_{i,n-2}) &= (n+1)(2m-2) + 2n-2; & i = m, \\
 w(v_{i,n-1}) &= (n+1)(2m-2) + 2n-1; & i = m, \\
 w(v_m) &= (n+1)(3m-3) + n.
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, berdasarkan penjabaran dua kasus di atas dapat dilihat dengan jelas bahwa fungsi pelabelan merupakan fungsi bijektif dan juga nilai tiap bobotnya berbeda sehingga dapat disimpulkan bahwa ini memenuhi syarat pelabelan anti ajaib. Karena itu, graf  $P_m \supseteq_o C_n$  merupakan suatu graf anti ajaib.  $\square$

Pada Gambar 2 diberikan contoh pelabelan anti ajaib pada graf  $P_5 \supseteq_o C_5$  dan  $P_8 \supseteq_o C_4$ .



Gambar 2. Pelabelan anti ajaib graf  $P_5 \supseteq_o C_5$  dan graf  $P_8 \supseteq_o C_4$

**Teorema 2.3.** Misalkan terdapat graf bintang  $S_m$  dengan  $m+1$  titik,  $m \geq 2$  dan graf siklus  $C_n$  dengan  $n \geq 3$  titik. Maka graf  $S_m \supseteq_o C_n$  merupakan graf anti ajaib.

**Bukti.** Graf  $S_m \supseteq_o C_n$  merupakan graf dengan himpunan simpul dan himpunan sisi berikut.

$$\begin{aligned}
 V(S_m \supseteq_o C_n) &= \{v_i \mid 0 \leq i \leq m\} \cup \{v_{i,j} \mid 0 \leq i \leq m; \ 1 \leq j \leq n-1\}, \\
 E(S_m \supseteq_o C_n) &= \{v_i v_{i,1} \mid 0 \leq i \leq m\} \cup \{v_i v_{i,n-1} \mid 0 \leq i \leq m\} \\
 &\quad \cup \{v_{i,j} v_{i,j+1} \mid 0 \leq i \leq m; \ 1 \leq j \leq n-2\} \cup \{v_0 v_i \mid 1 \leq i \leq m\}.
 \end{aligned}$$

Pembuktian teorema akan dibagi ke dalam tiga kasus sebagai berikut.

**Kasus 1** Saat  $m$  genap

Berikut didefinisikan fungsi pelabelan sisinya.

$$\begin{aligned} f(v_{i,j}v_{i,j+1}) &= ni + j + 1; & 0 \leq i \leq m, & 1 \leq j \leq n-2, \\ f(v_iv_{i,1}) &= ni + 1; & 0 \leq i \leq m, \\ f(v_{i,n-1}v_i) &= n(i+1); & 0 \leq i \leq m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v_0v_i) &= n(m+1) + 2i - 1; & 1 \leq i \leq \frac{m}{2}, \\ f(v_0v_i) &= n(m+1) + 2i - m; & \frac{m}{2} + 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Dari fungsi pelabelan sisi di atas diperoleh fungsi bobot simpul berikut.

$$\begin{aligned} w(v_i) &= n(m+2) + 2i(n+1); & 1 \leq i \leq \frac{m}{2}, \\ w(v_i) &= n(m+2) + 2i(n+1) - m + 1; & \frac{m}{2} + 1 \leq i \leq m, \\ w(v_{i,1}) &= 2ni + 3; & 0 \leq i \leq m, \\ w(v_{i,n-1}) &= n(2i+2) - 1; & 0 \leq i \leq m, \\ w(v_{i,j}) &= 2(ni+j) + 1; & 0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-2, \\ w(v_0) &= m(m+1)(n + \frac{1}{2}) + n + 1. \end{aligned}$$

**Kasus 2** Saat  $m$  ganjil dan  $n$  genap.

Didefinisikan fungsi pelabelan sisinya sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(v_{i,j}v_{i,j+1}) &= ni + j + 1; & 0 \leq i \leq m, & 1 \leq j \leq n-2, \\ f(v_iv_{i,1}) &= ni + 1; & 0 \leq i \leq m, \\ f(v_{i,n-1}v_i) &= n(i+1); & 0 \leq i \leq m, \\ f(v_0v_i) &= n(m+1) + 2i - 1; & 1 \leq i < \frac{m+1}{2}, \\ f(v_0v_i) &= n(m+1) + 2i - m - 1; & \frac{m+1}{2} + 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Dengan fungsi pelabelan sisi yang ada maka didefinisikan fungsi bobot simpul berikut.

$$\begin{aligned} w(v_i) &= n(m+2) + 2i(n+1); & 1 \leq i \leq \frac{m+1}{2}, \\ w(v_i) &= n(m+2) + 2i(n+1) - m; & \frac{m+1}{2} + 1 \leq i \leq m, \\ w(v_{i,1}) &= 2ni + 3; & 0 \leq i \leq m, \\ w(v_{i,n-1}) &= n(2i+2) - 1; & 0 \leq i \leq m, \\ w(v_{i,j}) &= 2(ni+j) + 1; & 0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-2, \\ w(v_0) &= m(m+1)(n + \frac{1}{2}) + n + 1. \end{aligned}$$

**Kasus 3** Saat  $m$  ganjil  $n$  ganjil.

Selanjutnya diberikan fungsi pelabelan sisi sebagai berikut.

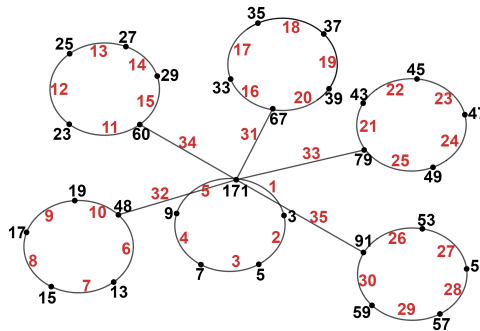
$$\begin{aligned}
 f(v_{i,j}v_{i,j+1}) &= ni + j + 1; & 0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-2, \\
 f(v_iv_{i,1}) &= ni + 1; & 0 \leq i \leq m, \\
 f(v_{i,n-1}v_i) &= n(i+1); & 0 \leq i \leq m, \\
 f(v_0v_i) &= n(m+1) + 2i; & 1 \leq i < \frac{m-1}{2}, \\
 f(v_0v_i) &= n(m+1) + 2i - m; & \frac{m-1}{2} + 1 \leq i \leq m.
 \end{aligned}$$

Dengan fungsi pelabelan sisi yang ada maka selanjutnya diberikan fungsi bobot simpulnya.

$$\begin{aligned}
 w(v_i) &= n(m+2) + 2i(n+1) + 1; & 1 \leq i \leq \frac{m-1}{2}, \\
 w(v_i) &= n(m+2) + 2i(n+1) - m + 1; & \frac{m-1}{2} + 1 \leq i \leq m, \\
 w(v_{i,1}) &= 2ni + 3; & 0 \leq i \leq m, \\
 w(v_{i,n-1}) &= n(2i+2) - 1; & 0 \leq i \leq m, \\
 w(v_{i,j}) &= 2(ni+j) + 1; & 0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-2, \\
 w(v_0) &= m(m+1)(n + \frac{1}{2}) + n + 1.
 \end{aligned}$$

Dari analisis ketiga kasus ini, terlihat bahwa fungsi pelabelan sisinya merupakan suatu fungsi bijektif. Selanjutnya, bobot untuk setiap simpul tidak ada yang beririsan. Maka diperoleh bahwa graf  $S_m \supseteq_o C_n$  adalah graf anti ajaib.  $\square$

Berikut diberikan contoh pelabelan anti ajaib pada graf  $S_5 \supseteq_o C_5$ .



Gambar 3. Pelabelan anti ajaib graf  $S_5 \supseteq_o C_5$

**Teorema 2.4.** Misalkan terdapat graf roda  $W_m$  dengan  $m+1$  titik,  $m \geq 3$ , dan graf siklus  $C_n$  dengan  $n \geq 3$  titik. Maka graf  $W_m \supseteq_o C_n$  merupakan graf anti ajaib.

**Bukti.** Struktur graf  $W_m \supseteq_o C_n$  didefinisikan melalui himpunan simpul dan himpunan sisi berikut.

$$\begin{aligned} V(W_m \supseteq_o C_n) &= \{v_i \mid 1 \leq i \leq m+1\} \cup \{v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m+1; 1 \leq j \leq n-1\}, \\ E(W_m \supseteq_o C_n) &= \{v_i v_{i,1} \mid 1 \leq i \leq m+1\} \cup \{v_i v_{i,n-1} \mid 1 \leq i \leq m+1\} \\ &\quad \cup \{v_{i,j} v_{i,j+1} \mid 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-2\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq m-1\} \\ &\quad \cup \{v_m v_1\} \cup \{v_i v_{m+1} \mid 1 \leq i \leq m\}. \end{aligned}$$

Pembuktiannya dibagi dalam dua kasus sebagai berikut.

**Kasus 1**  $m$  ganjil.

Berikut merupakan fungsi pelabelan sisinya.

$$\begin{aligned} f(v_{i,j} v_{i,j+1}) &= n(i-1) + j + 1; & 1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq n-2, \\ f(v_{i,1} v_i) &= n(i-1) + 1; & 1 \leq i \leq m+1, \\ f(v_{i,n-1} v_i) &= ni; & 1 \leq i \leq m+1, \\ f(v_i v_{i+1}) &= n(m+1) + 1 + \frac{i}{2}; & 1 \leq i \leq m-1, i \text{ genap}, \\ f(v_i v_{i+1}) &= n(m+1) + \frac{m+i+2}{2}; & 1 \leq i \leq m-1, i \text{ ganjil}, \\ f(v_i v_{m+1}) &= n(m+1) + m + i; & 1 \leq i \leq m, \\ f(v_m v_1) &= n(m+1) + 1. \end{aligned}$$

Selanjutnya diperoleh fungsi bobot simpulnya, sebagai berikut.

$$\begin{aligned} w(v_i) &= n(3m+2i+2) + 2i + \frac{3m+5}{2}; & 2 \leq i \leq m-1, \\ w(v_{i,1}) &= n(2i-2) + 3; & 1 \leq i \leq m+1, \\ w(v_{i,n-1}) &= 2ni - 1; & 1 \leq i \leq m+1, \\ w(v_{i,j}) &= n(2i-2) + 2j + 1; & 1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq n-2, \\ w(v_1) &= 3mn + 4n + \frac{3m+9}{2}, \\ w(v_m) &= n(5m+2) + \frac{5m+5}{2} \\ w(v_{m+1}) &= n(m+1)^2 + \frac{3m^2 + 2mn + m}{2} + 1. \end{aligned}$$

**Kasus 2**  $m$  genap.



Berikut merupakan fungsi pelabelan sisinya.

$$\begin{aligned}
 f(v_{i,j}v_{i,j+1}) &= \begin{cases} n(i-1) + j + 1 & ; 1 \leq i \leq \frac{m}{2} \text{ dan } i = m+1, 1 \leq j \leq n-2, \\ ni + j + 1 & ; \frac{m}{2} + 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-2, \\ n(\frac{i}{2}) + j + 1 & ; i = m, 1 \leq j \leq n-2, \end{cases} \\
 f(v_{i,1}v_i) &= \begin{cases} n(i-1) + 1 & ; 1 \leq i \leq \frac{m}{2}, \\ ni + 1 & ; \frac{m}{2} + 1 \leq i \leq m-1, \\ n(\frac{i}{2}) + 1 & ; i = m, \end{cases} \\
 f(v_{i,n-1}v_i) &= \begin{cases} ni & ; 1 \leq i \leq \frac{m}{2} \text{ dan } i = m+1, \\ n(i+1) & ; \frac{m}{2} + 1 \leq i \leq m-1, \\ n(\frac{i}{2} + 1) & ; i = m, \end{cases} \\
 f(v_iv_{i+1}) &= \begin{cases} n(m+1) + 1 + \frac{i}{2} & ; i \text{ genap} \\ n(m+1) + \frac{m+i+1}{2} & ; i \text{ ganjil} \end{cases} \\
 f(v_mv_1) &= n(m+1) + 1,
 \end{aligned}$$

$$f(v_iv_{m+1}) = \begin{cases} n(m+1) + m + i & ; 1 \leq i \leq \frac{m}{2}, i = m+1, \\ n(m+1) + m + (i+1) & ; \frac{m}{2} + 1 \leq i \leq m-1, \\ n(m+1) + m + \frac{i}{2} + 1 & ; i = m. \end{cases}$$

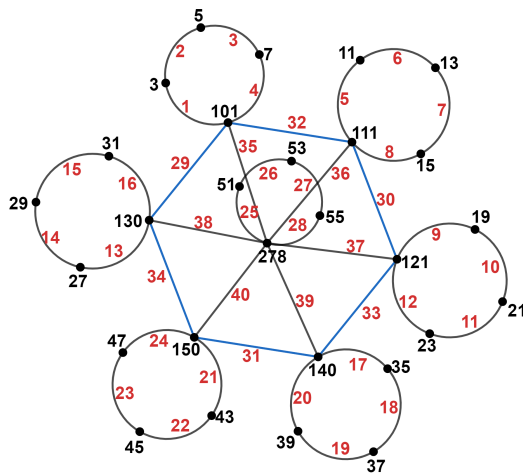
Dengan melihat pada fungsi pelabelan sisinya, maka dapat didefinisikan

fungsi bobot simpul berikut.

$$\begin{aligned}
 w(v_i) &= 3mn + (2n + 2)i + 2n + \frac{3m + 4}{2} & ; 2 \leq i \leq \frac{m}{2}, i = m + 1, \\
 w(v_i) &= 3mn + (2n + 2)i + 4n + \frac{3m + 6}{2} & ; \frac{m}{2} + 1 \leq i \leq m - 1, \\
 w(v_i) &= 4mn + 4n + \frac{5}{2}m + 3 & ; i = m, \\
 w(v_{i,1}) &= n(2i - 2) + 3 & ; 1 \leq i \leq \frac{m}{2} \text{ dan } i = m + 1, \\
 w(v_{i,1}) &= 2ni + 3 & ; \frac{m}{2} + 1 \leq i \leq m - 1, \\
 w(v_{i,1}) &= mn + 3 & ; i = m, \\
 w(v_{i,n-1}) &= 2ni - 1 & ; 1 \leq i \leq \frac{m}{2} \text{ dan } i = m + 1, \\
 w(v_{i,n-1}) &= 2n(i + 1) - 1 & ; \frac{m}{2} + 1 \leq i \leq m - 1, \\
 w(v_{i,n-1}) &= n(i + 2) - 1 & ; i = m, \\
 w(v_{i,j}) &= n(2i - 1) + 2j + 1 & ; 1 \leq i \leq \frac{m}{2} \text{ dan } i = m + 1, 1 \leq j \leq n - 2, \\
 w(v_{i,j}) &= 2(ni + j) + 1 & ; \frac{m}{2} + 1 \leq i \leq m - 1, 1 \leq j \leq n - 2, \\
 w(v_{i,j}) &= ni + 2j + 1 & ; i = m, 1 \leq j \leq n - 2, \\
 w(v_1) &= 3mn + 4n + \frac{3}{2}m + 4, \\
 w(v_{m+1}) &= n(m + 1)^2 + mn + \frac{3m^2}{2} + \frac{m}{2} + 1.
 \end{aligned}$$

□

Pada Gambar 4 diberikan contoh pelabelan anti ajaib pada graf  $W_6 \supseteq_o C_4$ .



Gambar 4. Pelabelan anti ajaib pada graf  $W_6 \supseteq_o C_4$

Dalam Teorema 2.1 telah diperoleh hasil bahwa graf  $C_m \supseteq_o C_n$  merupakan su-

atu graf anti ajaib untuk  $m$  ganjil. Sedangkan untuk graf  $C_m$  saat  $m$  genap akan diberikan pada teorema berikut.

**Teorema 2.5.** *Diberikan  $G$  graf terhubung dan  $r$ -reguler,  $r \geq 2$ . Jika  $G$  graf anti ajaib, maka  $G \supseteq_o C_n$  graf anti ajaib.*

**Bukti.** Diketahui  $G$  graf anti ajaib, maka terdapat suatu fungsi dengan domain  $E(G)$  dan kodomain  $\{1, 2, 3, \dots, |E(G)|\}$  dan merupakan fungsi bijektif, sehingga untuk setiap dua simpul yang berbeda pada  $V(G)$ , nilai bobotnya simpulnya berbeda.

Definisikan  $g : E(G \supseteq_o C_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |E(G \supseteq_o C_n)|\}$  sebagai berikut. Misalkan  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ . Selanjutnya diatur kembali indeksnya menjadi  $V(G) = \{v_{k_1}, v_{k_2}, \dots, v_{k_m}\}$  sehingga diperoleh  $w(v_{k_1}) < w(v_{k_2}) < \dots < w(v_{k_m})$ . Selanjutnya untuk sisi-sisi pada salinan  $C_n$  yang terkait dengan simpul  $v_{k_i}$ , namakan  $E_i(C_n) = \{e_{i,1}, e_{i,2}, \dots, e_{i,n}\}$  dengan himpunan simpul  $V_i(C_n) = \{v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,n}\}$  dan simpul pada siklus  $C_n$  yang dikaitkan dengan simpul  $v_{k_i}$  adalah simpul yang membentuk sisi  $e_{i,1}$  dan  $e_{i,n}$  dengan  $o = v_{i,n}$  dan  $e_{i,j} = v_{i,j-1}v_{i,j}$  untuk  $2 \leq j \leq n-1$ ,  $e_{i,1} = v_{k_i}v_{i,1}$ ,  $e_{i,n-1} = v_{i,n-1}v_{k_i}$ . Diperoleh:

$$g(e_{i,j}) = n(i-1) + j \quad ; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Selanjutnya, untuk sisi-sisi pada graf  $G$  namakan  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  diperoleh fungsi sebagai berikut.

$$g(e_l) = f(e_l) + mn \quad ; 1 \leq l \leq p.$$

Berikut ditunjukkan bahwa  $\bar{w}(u) \neq \bar{w}(v), \forall u, v \in V(G \supseteq_o C_n)$ . Fungsi bobot yang digunakan merupakan fungsi bobot simpul  $w(v_{i,j}) = 2n(i-1) + 2j + 1$  untuk  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1$  yang telah diberikan pada Teorema 2.1.

Misalkan  $A_i$  adalah bobot simpul di salinan ke- $i$  graf  $C_n$  dengan himpunan simpulnya dinamakan  $V_i(C_n)$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Untuk  $v \in V_i(C_n)$ , diperoleh:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\bar{w}(v) | v \in V_1(C_n)\} \\ &= \{3, 5, 7, \dots, 2n-1\} \\ A_2 &= \{\bar{w}(v) | v \in V_2(C_n)\} \\ &= \{2n+3, 2n+5, 2n+7, \dots, 4n-1\} \\ A_3 &= \{\bar{w}(v) | v \in V_3(C_n)\} \\ &= \{4n+3, 4n+5, 4n+7, \dots, 6n-1\} \\ &\vdots \\ A_m &= \{\bar{w}(v) | v \in V_m(C_n)\} \\ &= \{2mn-2n+3, 2mn-2n+5, 2mn-2n+7, \dots, 2mn-1\} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} B &= \{\bar{w}(v) | v \in V(G)\}, \\ &= \{rnm + w(v) | v \in V(G), r \geq 2\}. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa untuk setiap  $i$ ,  $A_i$  membentuk barisan naik dan juga untuk  $i \neq j$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  sehingga disimpulkan bahwa bobot tiap simpul berbeda. Untuk himpunan  $B$ , karena  $G$  merupakan graf anti ajaib dan reguler, maka bobotnya juga pastilah berbeda. Perhatikan bahwa untuk  $A_i \cap B = \emptyset$  sehingga jelas tiap himpunan memiliki bobot yang berbeda dengan bobot  $B$  memiliki nilai yang lebih besar dari himpunan lainnya. Jadi, terbukti bahwa graf  $G \succeq_o C_n$  juga merupakan graf anti ajaib.  $\square$

### 3. Kesimpulan

Dapat disimpulkan bahwa jika terdapat dua graf anti ajaib, setelah dikenakan operasi hasil kali sisir, maka graf tersebut tetap merupakan graf anti ajaib. Dapat dilihat juga secara umum, bila terdapat suatu  $G$  graf terhubung dan  $r$ -reguler,  $r \geq 2$  dengan  $G$  merupakan graf anti ajaib maka hasil  $G \succeq_o C_n$  juga merupakan graf anti ajaib. Dari sini, dapat dikaji lebih lanjut apakah suatu graf tak reguler jika digunakan operasi hasil kali sisir ataupun operasi lainnya merupakan graf anti ajaib atau tidak.

### Daftar Pustaka

- [1] Sugeng, K.A., 2005, *Magic and antimagic labeling of graphs*, Disertasi di University of Ballarat, diterbitkan
- [2] Diestel, R., 2017, *Graph Theory*, Springer, Heidelberg
- [3] Chartrand, G., Zhang, P., 2012, *A first course in graph theory*, Dover Publication, Inc, New York
- [4] Jackanich, M., 2011, *Antimagic Labeling of Graphs*, Disertasi di San Fransisco State University, diterbitkan
- [5] Nivedha, D., Devi, Y.S., 2024, On the antimagicness of generalized edge corona graphs, *Heliyon*, Vol. **10**(2): e24002
- [6] Wang, T.M., Zhang, G.H., 2013, On antimagic labeling of regular graphs with particular factors, *Journal of Discrete Algorithms*, Vol. **23**: 76 – 82
- [7] Meenakshi, C., Kathiresan, K.M., 2019, A generalization of magic and antimagic labelings of graphs, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* Vol. **16**: 125 – 144
- [8] Liang, Y.-C., 2013, *Anti-magic labeling of graphs*, Disertasi di National Sun Yat-Sen University, tidak diterbitkan
- [9] Gallian, J.A., 2022, A Dynamic Survey of Graph Labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics*, #DS6
- [10] Matamala, M., Zamora, J., 2018, Weighted antimagic labeling, *Discrete Applied Mathematics* Vol. **245**: 194 – 201
- [11] Sethuraman, G., Shermily, K.M., 2021, Antimagic labeling of new classes of tress, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* Vol. **18** : 110 – 116
- [12] Nalliah, M., 2016, Antimagic labeling of digraphs, *J. Indones. Math. Soc* Vol. **22**: 61 – 69
- [13] Chang, F., Liang, Y.-C., Pan, Z., Zhu, X., 2015, *Anti-magic labeling of regular graphs*, <https://doi.org/10.48550/arXiv.1505.07688>

- [14] Cranston, D.W., Liang, Y.-C., Zhu, X., 2015, Regular graphs of odds degree are antimagic, *Journal of Graph Theory* Vol. **80**: 28 – 33
- [15] Latchoumanane, V., Varadhan, M., 2022, Antimagic labeling for product of regular graphs, *Symmetry* Vol. **14**: 1235
- [16] Agustin, I.H., Prihandini, R.M., Dafik., 2019,  $P_2 \supseteq H$  – super antimagic total labeling of comb products of graphs, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* Vol. **16**: 163 – 171